PARTIEL DE PHYSIQUE ATOMIQUE ET SUBATOMIQUE

Mercredi 2 mars 2016 - Durée 1h30

TOUT DOCUMENT INTERDIT – CALCULATRICES AUTORISEES

QUESTION DE COURS

Etablir, dans le cadre du modèle de Bohr, la relation donnant le potentiel d'ionisation de l'atome d'hydrogène en fonction de sa masse réduite μ_e, de $e^2 = q_e^2/4\pi\varepsilon_0$ $-q_e$ et ε_0 respectivement la charge élémentaire et la permittivité diélectrique du vide- et de la constante de Planck réduite. Comparer ce potentiel à celui du positronium, hydrogénoïde constitué d'un positron autour duquel gravite un électron.

EXERCICE

On rappelle que la perturbation relativiste de l'atome d'hydrogène – au sens d'un développement limité de l'énergie- est donné par $W_{mv} = -p^4/8m_e^3c^2$ avec p la quantité de mouvement de l'électron, m_e sa masse et c la célérité de la lumière dans le vide.

1. Si on appelle T l'énergie cinétique non relativiste de l'électron, exprimer W_{mv} en fonction de T, m_e et c. En notant E *la valeur propre* du hamiltonien non perturbé H_0 et V *l'énergie potentielle* associée, exprimer W_{mv} en fonction de E, V, m_e et c.
2. Le calcul perturbatif au premier ordre d'états non dégénérés $\Psi_{n\,l\,j\,mj}(r, \theta, \varphi)$ amène à calculer l'intégrale $E_{mv}^{(1)} = \iiint \Psi_{n\,l\,j\,mj}^{*} W_{mv} \Psi_{n\,l\,j\,mj}\, d\tau$, avec $d\tau$ l'élément de volume en coordonnées sphériques. Réécrire $E_{mv}^{(1)}$ sous forme intégrale, *et donc sans chercher à passer par le formalisme braket*, en fonction de m_e, c, $\Psi_{n\,l\,j\,mj}^{*}$, $\Psi_{n\,l\,j\,mj}$, E, $e^2 = q_e^2/4\pi\varepsilon_0$, r, θ et φ. On aura préalablement exprimé l'énergie potentielle de l'atome d'hydrogène à l'aide de paramètres pertinents.
3. On donne les valeurs moyennes nécessaires au calcul de l'intégrale $E_{mv}^{(1)}$, et en particulier $\langle r^{-1} \rangle = \dfrac{1}{a_0 n^2}$ et $\langle r^{-2} \rangle = \dfrac{1}{a_0^2 n^3 (l+1/2)}$, avec a_0 le rayon de Bohr. Calculer la en fonction de n, de l, de la valeur propre E_n du hamiltonien non perturbé H_0 et de la constante de structure fine $\alpha = e^2/\hbar c$.
4. La théorie des perturbations donne les corrections suivantes pour le couplage spin-orbite pour $l \neq 0$: $E_{SO}^{(1)+} = \dfrac{|E_n|\alpha^2}{2n} \dfrac{1}{(l+1)(l+1/2)}$ pour $j = l + 1/2$ et $E_{SO}^{(1)-} = -\dfrac{|E_n|\alpha^2}{2n} \dfrac{1}{l(l+1/2)}$ pour $j = l - 1/2$. En déduire la correction totale à l'énergie $E_{n\,j}^{(1)}$ due à $W_{mv} + W_{SO}$. On exprimera le résultat en fonction de n, de j, de E_n et de α.